УРАЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
УГЛТУ

Л. А. Золкина
Е.С. Плотникова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Екатеринбург
2012

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет»

Кафедра высшей математики

Л. А. Золкина
Е.С. Плотникова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания и индивидуальные домашние задания
для студентов всех специальностей

Екатеринбург
2012

Печатается по рекомендации методической комиссии ФЭУ
Протокол № 2 от 2 сентября 2011 г.

Рецензент – С.С. Рублева – доцент кафедры высшей математики УГЛТУ

Редактор Е.Л. Михайлова
Оператор компьютерной верстки Упорова Т.В.

Подписано в печать 25.10.12		Поз. 110
Печать плоская	Формат 60х84 1/16	Тираж 10 экз.
Заказ №	Печ. л. 2,79	Цена р. к.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным называется уравнение, связывающее независимую переменную x, функцию y и все её производные до n-го порядка:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в него производной.

Например, $F\left(x, y, y'\right) = 0$ – дифференциальное уравнение 1-го порядка, $F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ – дифференциальное уравнение 2-го порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция $f(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

I. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

$F\left(x; y; y'\right) = 0$ – общий вид уравнения.

Если уравнение разрешено относительно производной y', то его можно представить как $y' = f\left(x; y\right)$.

Общее решение уравнения имеет вид $y = \varphi\left(x; C\right)$, где C – произвольная постоянная. Если полученное решение не разрешено относительно y, то его называют общим интегралом $\Phi\left(x; y; C\right) = 0$.

Частное решение получается, если придать постоянной C конкретное числовое значение. Для этого ставятся начальные условия, то есть задаётся значение функции y в некоторой точке $x = x_0$, а именно, $y(x_0) = y_0$. Задача, в которой требуется найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

Рассмотрим типы уравнений 1-го порядка.

1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$f_1\left(x\right) g_1\left(y\right) y' + f_2\left(x\right) g_2\left(y\right) = 0$ – общий вид.

$\int \frac{g_1\left(y\right)}{g_2\left(y\right)} dy + \int \frac{f_2\left(x\right)}{f_1\left(x\right)} dx = C$ – общий интеграл.

Пример 1. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y' = 2xy.$$

Решение: Согласно $y' = \frac{dy}{dx}$ получим: $\frac{dy}{dx} = 2xy$.

Разделим переменные. Для этого домножим правую и левую части уравнения на выражение $\frac{dx}{y}$. Получим:

$$\frac{dy}{y} = 2xdx .$$

После интегрирования имеем:

$$\ln|y| = x^2 + \ln C .$$

Преобразуем логарифмы по свойству $\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$:

$$\ln|y| - \ln C = x^2 ,$$

$$\ln\frac{|y|}{C} = x^2 .$$

Используя определение логарифма, получим $|y| = Ce^{x^2}$,

$$y = \pm Ce^{x^2} .$$

Так как C – произвольная постоянная, можно общее решение дифференциального уравнения записать так: $y = Ce^{x^2}$.

Пример 2. Найдите частное решение дифференциального уравнения $\sqrt{x}ydy - \left(7x^2 - 2x + \sqrt{x}\right)ydx = 0$ при условии $y(1) = 2$.

Решение: Разделим переменные, домножив $\sqrt{x}ydy = \left(7x^2 - 2x + \sqrt{x}\right)ydx$ на $\frac{1}{\sqrt{x}y}$, тогда получим

$$\frac{y}{y}dy = \frac{7x^2 - 2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx,$$

$$dy = \left(7x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x} + 1\right)dx.$$

Интегрируем по формулам $\int du = u + C$ и $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$.

Получим общее решение уравнения $y = \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{2}x^{\frac{3}{2}} + x + C$. Найдём частное решение, подставив $x_0 = 1$ вместо x и $y_0 = 2$ вместо y.

$2=\frac{14}{5}-\frac{4}{2}+1+C$, вычислим $C=-\frac{14}{5}+\frac{4}{2}-1+2=0,2$ и подставим его значение в общее решение. $y=\frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{2}x^{\frac{3}{2}}+x+0,2$ – частное решение.

2. Однородные дифференциальные уравнения

Так называются уравнения вида $F(x;y;y')=0$, если их левая часть представляет собой однородную функцию относительно x и y, рассматриваемых как независимые переменные, то есть если

$$F(tx;ty;y')\equiv t^k F(x;y;y').$$

Тогда $F(x;y;y')=0$, $F\left(x\cdot 1;\, x\frac{y}{x};\, y'\right)=0$, $xF\left(1;\frac{y}{x};\, y'\right)=0$.

Отсюда тип уравнения $F\left(1;\frac{y}{x};\, y'\right)=0$.

Разрешая относительно y' последнее уравнение, получим

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $\frac{y}{x}=U$. Тогда $y=U\,x$, $y'=U'x+U$, где $U=U(x)$ – новая искомая функция. Подставляя в уравнение, получим $U'x+U=\varphi(U)$, $\frac{dU}{dx}x=\varphi(U)-U$. Разделяя переменные, имеем $\frac{dU}{\varphi(U)-U}=\frac{dx}{x}$.

Выполним интегрирование и перейдём от U к переменной y.

Пример 3. Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'=\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}$ при условии $y(1)=2$.

Решение: используя замену $\frac{y}{x}=U$, получим уравнение с разделяющимися переменными: $U'x+U=U+U^2$. Далее $\frac{dU}{dx}x=U^2$.

Разделим переменные $\frac{dU}{U^2}=\frac{dx}{x}$. Интегрируем отдельно левую и правую части уравнения:

$$\int\frac{dU}{U^2}=-\frac{1}{U} \qquad \text{и} \qquad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$$

Тогда $-\frac{1}{U}=\ln|x|+C$, вернёмся к y: $-\frac{x}{y}=\ln|x|+C$.

Получаем $y=-\frac{x}{\ln|x|+C}$ – общее решение.

Найдём частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$2=-\frac{1}{\ln 1+C},\ 2=-\frac{1}{C},\ C=-2.$$

Тогда частное решение имеет вид: $y=-\frac{x}{\ln|x|-2}$ или $y=\frac{x}{2-\ln|x|}$.

Пример 4. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'=\frac{y}{x}+tg\,\frac{y}{x}.$$

Решение: подстановка $U=\frac{y}{x}$ дает $U'x+U=U+tgU$. Разделяем переменные:

$$\frac{dU}{tgU}=\frac{dx}{x} \text{ или } \frac{\cos U dU}{\sin U}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим $\ln|\sin U|=\ln|x|+\ln C$, то есть $\sin U=Cx$.

Отсюда $U=\arcsin Cx$ и $y=x\arcsin Cx$.

3. Линейные дифференциальные уравнения

Линейным называется уравнение, если функция и ее производная входят в него в 1-й степени, то есть линейно:

$$y'+p(x)y=q(x).$$

Уравнение решается с помощью замены $y=UV$. Найдем производную $y'=U'V+UV'$ и подставим это выражение в уравнение $U'V+UV'+p(x)UV=q(x)$. Далее представим уравнение в виде $U'V+U(V'+p(x)V)=q(x)$ и наложим на функцию V условие, при котором $V'+p(x)V=0$. Тогда уравнение можно представить в виде двух уравнений с разделяющимися переменными:

$$1)\ V'+p(x)V=0,$$

$$2)\ U'V=q(x).$$

Решая последовательно эти уравнения, найдём функцию y.

Пример 5. Найдите частное решение уравнения

$$y' + y\ \mathrm{ctg}\, x = \sin x,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Решение: Полагаем $y = UV$, тогда $y' = U'V + UV'$ и подставляем в данное уравнение $U'V + UV' + UV\ \mathrm{ctg}\, x = \sin x$,

$$U'V + U(V' + V\,\mathrm{ctg}\, x) = \sin x.$$

Получаем два уравнения:

1) $V' + V\,\mathrm{ctg}\, x = 0,$

2) $U'V = \sin x.$

Решаем первое уравнение

$$\frac{dV}{dx} = -V\,\mathrm{ctg}\, x,$$

$$\frac{dV}{V} = -\mathrm{ctg}\, x dx.$$

Интегрируя, получим $\ln|V| = -\ln|\sin x|$. Следовательно, $V = \dfrac{1}{\sin x}$.

Подставим V во второе уравнение и найдем функцию U:

$$\frac{dU}{dx}\frac{1}{\sin x} = \sin x,\quad dU = \sin^2 x dx.$$

$$U = \int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Тогда получаем общее решение $y = UV = \dfrac{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C}{\sin x}$.

Используя начальные условия, найдём значение константы C:

$$0 = \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin \pi + C}{\sin\frac{\pi}{2}},\ \ 0 = \frac{\pi}{4} + C,\ \ C = -\frac{\pi}{4}$$

и запишем частное решение уравнения

$$y = \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{\pi}{4}}{\sin x}.$$

4. Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

Уравнение Бернулли можно решить двумя способами:

а) с помощью замены $z = y^{1-n}$, тогда $z' = (1-n)\ y^{-n}y'$;

б) как линейное уравнение подстановкой $y = UV$, тогда $y' = U'V + UV'$.

Пример 6. Найдите общее решение уравнения

$$y' - \frac{3y}{x} = xy^2.$$

Решение: Полагаем $y = UV$, тогда $y' = U'V + UV'$ и подставляем в данное уравнение $U'V + UV' - \frac{3}{x}UV = x\left(UV\right)^2$,

$$U'V + U\left(V' - \frac{3}{x}V\right) = xU^2V^2,$$

Получаем два уравнения:

$$1)\ V' - \frac{3}{x}V = 0,$$

$$2)\ U'V = xU^2V^2.$$

Решаем первое уравнение

$$V' = \frac{3}{x}V,$$

$$\frac{dV}{V} = 3\frac{dx}{x},$$

интегрируя, находим функцию V:

$$\ln V = 3\ln x,$$

следовательно,

$$V = x^3.$$

Подставим V во второе уравнение и найдем функцию U:

$$\frac{dU}{dx}x^3 = xU^2x^6, \qquad \frac{dU}{U^2} = x^4dx,$$

$$-\frac{1}{U} = \frac{x^5}{5} + C, \qquad U = -\frac{1}{\frac{x^5}{5} + C},$$

$$U = -\frac{5}{x^5 + 5C}.$$

Тогда общее решение $y = -\frac{5x^3}{x^5 + 5C}$.

II. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка

$F(x; y; y'; y'') = 0$ – общий вид уравнения 2-го порядка.

$y = \Phi(x; C_1; C_2)$ – общее решение уравнения.

1. Уравнение $F(x; y'') = 0$ или $y'' = f(x)$.

Интегрируя по x левую и правую части, получим

$$y' = \int f(x)\,dx = F(x) + C_1.$$

Интегрируя ещё раз, получим общее решение уравнения

$$y = \int (F(x) + C_1)\,dx = \Phi(x) + C_1 x + C_2 .$$

Пример 7. Найдите частное решение уравнения

$$y'' = \sin 2x, \ \ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1.$$

Решение: $y' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1$,

$$y = \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C_1 \right) dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2 .$$

Итак, $y = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$ – общее решение уравнения.

Найдём частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$1 = -\frac{1}{2} + C_1, \ C_1 = \frac{3}{2}, \ 0 = C_2 .$$

Тогда частное решение: $y = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{2}x$.

2. Уравнение $F(x; y'; y'') = 0$ или $y'' = f(x; y')$.

Это уравнение не содержит в явном виде искомой функции y.

Обозначим производную y' через p, то есть $y' = p$, тогда $y'' = p'$.

Подставляя эти выражения в уравнение (производим понижение порядка уравнения), получим уравнение первого порядка относительно неизвестной функции p:

$$F(x; p; p') = 0 \text{ или } p' = f(x; p) .$$

Интегрируя, находим общее решение $p = p(x; C_1)$.

Так как $p = y' = \frac{dy}{dx}$, получаем общий интеграл $y = \int p(x; C_1)\,dx + C_2$.

Пример 8. Найдите общее решение уравнения $xy''-y'=x^2 e^x$.

Решение: Положим $y'=p$ и $y''=p'$. Тогда получаем уравнение первого порядка, причём линейное

$$xp'-p=x^2 e^x.$$

Введём замену $p=UV$ и $p'=U'V+UV'$:

$$x\left(U'V+UV'\right)-UV=x^2 e^x.$$

Разделим правую и левую части уравнения на x:

$$U'V+UV'-\frac{UV}{x}=xe^x,$$

$$U'V+U\left(V'-\frac{V}{x}\right)=xe^x.$$

$$1)\ V'-\frac{V}{x}=0,\quad 2)\ U'V=xe^x.$$

Найдём функцию V:

$$\frac{dV}{dx}=\frac{V}{x}.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\ln|V|=\ln|x|,$$

откуда $V=x$.

Найдём функцию U:

$$\frac{dU}{dx}x=xe^x,\quad dU=e^x dx,\quad U=e^x+C_1.$$

Следовательно, $p=x\left(e^x+C_1\right)$.

Но так как $p=\dfrac{dy}{dx}$, то имеем $\dfrac{dy}{dx}=x\left(e^x+C_1\right)$.

Откуда $y=\int x\left(e^x+C_1\right)dx$ интеграл $\int xe^x dx+C_1\int dx$. Первый интеграл возьмём, используя формулу интегрирования по частям: $\int UdV=UV-\int VdU$.

$$U=x,\qquad dV=e^x dx,$$

$$dU=dx,\quad V=\int e^x dx=e^x,$$

тогда получим

$$\int xe^x dx+C_1x=xe^x-\int e^x dx+C_1x=xe^x-e^x+C_1x+C_2.$$

Решение уравнения имеет вид:

$$y=xe^x-e^x+C_1x+C_2.$$

3. Уравнение $F\left(y; y'; y''\right) = 0$.

Это уравнение не содержит в явном виде независимой переменной x.

Для его решения положим $y' = p$, но будем считать p функцией от y. Тогда $y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\,p$.

Подставляя в уравнение выражения для y и y' (производим понижение степени производной), получим уравнение первого порядка относительно p:

$$F\left(y; p; p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, найдём функцию $p = p(y; C_1)$.

Так как $p = \frac{dy}{dx}$, получим уравнение $\frac{dy}{dx} = p(y; C_1)$.

Разделим переменные и найдём общий интеграл исходного уравнения:

$$\Phi\left(x; y; C_1; C_2\right) = 0.$$

Пример 9. Найдите общее решение уравнения $y'' = a^2 y$.

Решение: Положим $y' = p \quad y'' = p\frac{dp}{dy}$.

Получим уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными

$$p\frac{dp}{dy} = a^2 y.$$

Разделим переменные и проинтегрируем $pdp = a^2 ydy$,

$$\frac{p^2}{2} = \frac{a^2 y^2}{2} + C_1.$$

Отсюда $p = \sqrt{a^2 y^2 + 2C_1}$. Тогда $\frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 y^2 + 2C_1}$ также является уравнением с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2 y^2 + 2C_1}} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 y^2 + 2C_1}} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ay)}{\sqrt{(ay)^2 + 2C_1}} = \frac{1}{a}\ln\left|ay + \sqrt{(ay)^2 + 2C_1}\right| + C_2.$$

Итак, $x = \dfrac{1}{a}\ln\left|ay + \sqrt{(ay)^2 + 2C_1}\right| + C_2$ является общим решением нашего уравнения.

III. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

1. Однородные линейные дифференциальные уравнения (ОЛДУ)

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Теорема о структуре общего решения ОЛДУ

Если y_1 и y_2 – линейно независимые частные решения уравнения, то общим решением этого уравнения является их линейная комбинация $y = C_1y_1 + C_2y_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Решение уравнения будем искать в виде $y = e^{kx}$. Тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$. Подставим найденные выражения в уравнение, получим уравнение

$$ak^2 + bk + c = 0\,.$$

Это уравнение называется характеристическим.

Корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Тогда общее решение однородного уравнения можно представить в виде таблицы.

D>0	$k_1 \neq k_2$	$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
D=0	$k_1 = k_2 = k$	$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2x\right)$
D<0	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$

Пример 10. Решите уравнения:

1. $y'' + y' - 2y = 0.$

Решение: Выбираем решение в виде $y = e^{kx}$, тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$.

$k^2 + k - 2 = 0$ – характеристическое уравнение, где

$$k_1 = 1,\ k_2 = -2\,.$$

Общее решение уравнения: $y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$.

2. $4y'' + 4y' + y = 0$.

Решение: $4k^2 + 4k + 1 = 0$ – характеристическое уравнение, или

$\left(2k + 1\right)^2 = 0$,

отсюда $k_1 = k_2 = -0,5$.

Следовательно, $y = e^{-0,5x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

3. $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Решение: $k^2 + 2k + 5 = 0$ – характеристическое уравнение.

$k_{1,2} = -1 \pm 2i$ – корни характеристического уравнения комплексные, $\alpha = -1, \ \beta = 2$.

Тогда $y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$ – общее решение.

Найдем частное решение. Для этого продифференцируем y:

$$y' = -e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + e^{-x}\left(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x\right)$$

и подставим начальные условия в решение и его производную.

Получим: $\begin{cases} 0 = C_1, \\ 1 = -C_1 + 2C_2, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0,5. \end{cases}$

Частное решение $y = 0,5e^{-x} \sin 2x$.

2. Неоднородные линейные дифференцирующие уравнения (НЛДУ)

$$ay'' + by' + cy = f(x).$$

Теорема о структуре общего решения неоднородного уравнения

Общим решением неоднородного уравнения является сумма двух решений: общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $y = Y + \overline{y}$.

Частное решение неоднородного уравнения определяется видом его правой части и обозначается $\overline{y}$.

Представим различные случаи выбора $\overline{y}$ в виде таблицы.

$f(x) = P_n\left(x\right)e^{mx}$		
$\overline{y} = Q_n(x)e^{mx}x^r$	$m \neq k_1, \ m \neq k_2 \Rightarrow r = 0$	$\overline{y} = Q_n(x)e^{mx}$
Q_n - многочлен n-й степени в общем виде	$m = k_1, \ или \ m = k_2 \Rightarrow r = 1$	$\overline{y} = Q_n(x)xe^{mx}$
	$m = k_1 = k_2, \Rightarrow r = 2$	$\overline{y} = Q_n(x)x^2e^{mx}$
$f(x) = e^{mx}\left(M \cos nx + N \sin nx\right)$		
$\overline{y} = e^{mx} \ (A \cos nx + B \sin nx) \ x^r$	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i,$ $m \neq \alpha, \ n \neq \beta \Rightarrow r = 0$	$\overline{y} = e^{mx} \ \left(A \cos nx + B \sin nx\right)$
	$m = \alpha, \ n = \beta \Rightarrow r = 1$	$\overline{y} = e^{mx} \ \left(A \cos nx + B \sin nx\right) x$

Пример 11. Решите уравнения:

1. $y''+4y'+3y=x.$

Решение:

а) Найдём решение ОЛДУ $y''+4y'+3y=0.$

Выбираем решение в виде $y=e^{kx}$.

Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2+4k+3=0,$$

$$k_1=-1,\ k_2=-3.$$

Общее решение ОЛДУ имеет вид

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}.$$

б) Найдём частное решение НЛДУ. Оно зависит от вида правой части $f(x)=x$ и кратности корней характеристического уравнения числу m (см. таблицу).

$m=0,\ m\neq k_1,\ m\neq k_2$, следовательно, $r=0$, тогда $\overline{y}=Ax+B$.

Найдём $\overline{y}',\ \overline{y}''$ и подставим полученные выражения в уравнение:

$$\overline{y}'=A,\ \overline{y}''=0.$$

Тогда $4A+3(Ax+B)=x$.

Приравниваем коэффициенты при равных степенях x и находим неопределённые коэффициенты A и B из системы уравнений.

$$\begin{cases} 3A=1, \\ 4A+3B=0. \end{cases} \qquad \begin{matrix} A=\dfrac{1}{3}, \\ B=-\dfrac{4}{9}. \end{matrix}$$

Отсюда $\overline{y}=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{9}.$

Составим общее решение уравнения: $y=Y+\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{9}.$

2. $y''+2y'+y=6e^{-x},\ \ y(0)=3,\ \ y'(0)=1.$

Решение:

а) Найдём общее решение ОЛДУ $y''+2y'+y=0.$

Выбираем решение в виде $y=e^{kx}$ и составляем характеристическое уравнение

$$k^2+2k+1=0,\ \text{ или }\ (k+1)^2=0.$$

Следовательно, $k_1 = k_2 = -1$ и общее решение записываем

$$Y = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

б) Найдём частное решение НЛДУ.

$f(x) = 6e^{-x}$,

$m = -1,\ k_1 = k_2 = m = -1$, кратность $r = 2$. Тогда $\overline{y} = Ax^2e^{-x}$.

Найдём $\overline{y}',\ \overline{y}''$:

$$\overline{y}' = A(2xe^{-x} - x^2e^{-x}) = Ae^{-x}(2x - x^2),$$

$$\overline{y}'' = A(-e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x)) = Ae^{-x}(x^2 - 4x + 2).$$

Подставим полученные выражения в уравнение и найдём значение A:

$$Ae^{-x}(x^2 - 4x + 2) + 2Ae^{-x}(2x - x^2) + Ae^{-x}x^2 = 6e^{-x},$$

$$Ae^{-x}(\underline{x^2} - \underline{\underline{4x}} + 2 + \underline{\underline{4x}} - \underline{2x^2} + \underline{x^2}) = 6e^{-x},$$

$$Ae^{-x}2 = 6e^{-x},$$

Разделим правую и левую части уравнения на e^{-x}, получим $2A = 6$, $A = 3$. Следовательно, $\overline{y} = 3x^2e^{-x}$.

Общее решение НЛДУ имеет вид: $y = e^{-x}\left(C_1 + C_2x\right) + 3x^2e^{-x}$.

Найдём частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Для этого продифференцируем общее решение и подставим начальные условия в y и y'. Получим систему двух уравнений с неизвестными C_1 и C_2.

$$y(0) = 3,\ e^0\left(C_1 + C_2\,0\right) + 3\ 0\ e^0 = 3 \Rightarrow C_1 = 3.$$

$$y' = -e^{-x}\left(C_1 + C_2x\right) + e^{-x}C_2 + 6xe^{-x} - 3x^2e^{-x} = e^{-x}\left(-C_1 - C_2x + C_2 + 6x - 3x^2\right),$$

$$y'(0) = 1,\ e^0\left(-C_1 - C_2\cdot 0 + C_2 + 6\cdot 0 - 3\cdot 0\right) = 1 \Rightarrow -C_1 + C_2 = 1.$$

$$\begin{cases} C_1 = 3, \\ -C_1 + C_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 3, \\ C_2 = 4. \end{matrix}$$

Частное решение НЛДУ имеет вид $y = e^{-x}\left(3 + 4x\right) + 3x^2e^{-x}$.

3. $y'' + 3y' = 2x + 1.$

Решение:

а) Найдём общее решение ОЛДУ $y'' + 3y' = 0$.

Выбираем решение в виде $y = e^{kx}$ и составляем характеристическое уравнение

$$k^2 + 3k = 0 \quad \text{или} \quad k\left(k+3\right) = 0,$$

$$k_1 = 0, \; k_2 = -3.$$

Общее решение имеет вид:

$$Y = C_1 + C_2 e^{-3x}.$$

б) Найдём частное решение НЛДУ.

$f(x) = 2x + 1,$

$m = 0, \; k_1 = m = 0, \; k_2 \neq m$, кратность $r = 1$. Тогда $\overline{y} = \left(Ax + B\right)x$ или $\overline{y} = Ax^2 + Bx$. Найдём $\overline{y}', \; \overline{y}''$:

$$\overline{y}' = 2Ax + B, \; \overline{y}'' = 2A.$$

Подставим $\overline{y}'$ и $\overline{y}''$ в уравнение и найдём значения A и B:

$$2A + 3(2Ax + B) = 2x + 1,$$

$$2A + 6Ax + 3B = 2x + 1.$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях x, получим систему

$$\begin{cases} 6A = 2, \\ 2A + 3B = 1. \end{cases}$$

Отсюда $A = \dfrac{1}{3}$, тогда $\dfrac{2}{3} + 3B = 1$ и $B = \dfrac{1}{9}$.

Следовательно, $\overline{y} = \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{9}x.$

Запишем общее решение НЛДУ: $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{9}x.$

ТЕСТ

№ 1 *не менее двух вариантов ответа*

Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями первого порядка являются…

1) $2yy'+x^2+3x-=0$

2) $xy\frac{d^2y}{dx^2}-y\frac{dy}{dx}+y^3=y^2$

3) $y\frac{dz}{dx}-x^2y\frac{dz}{dy}=0$

4) $\frac{d^2y}{dx^2}+xy\frac{dy}{dx}+3=0$

№ 2 *не менее двух вариантов ответа*

Из данных дифференциальных уравнений уравнениями с разделяющимися переменными являются…

1) $y^2\frac{dy}{dx}+x^2y=0$

2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{1+y}-3$

3) $\frac{dy}{dx}+3^x x^2-y=0$

4) $y^2\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y^4+2}$

№ 3 *один вариант ответа*

Дано дифференциальное уравнение $y'=2-y$. Тогда его решением является функция…

1) $y=e^{-x}+1$

2) $y=e^{-x}-2$

3) $y=e^{-x}-2$

4) $y=e^{-x}+2$

№ 4 *один вариант ответа*

Дифференциальное уравнение $x^2y'+\sqrt{x}y=xy^3$ является…

1) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными
2) линейным дифференциальным уравнением
3) однородным дифференциальным уравнением
4) уравнением Бернулли

№ 5 *один вариант ответа*

Дано дифференциальное уравнение $y'-\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}-1$. Тогда его решением является функция…

1) $y=-\frac{1}{x^2}$

2) $y=-1-x\ln|x|$

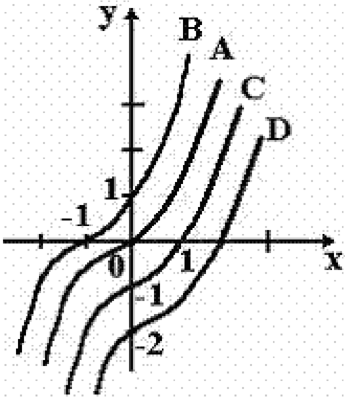
3) $y=-\frac{1}{3x^2}-x\ln|x|$

4) $y=-1-x$

№ 6 *один вариант ответа*

Дано дифференциальное уравнение $y' = (2k+1)x^3$, тогда функция $y = \frac{1}{8}x^4$ является его решением при *k,* равном…

1) -1
2) $-\frac{1}{2}$
3) -2
4) 2



№ 7 *один вариант ответа*

Дано дифференциальное уравнение $xy' = 3y$ при $y(1) = 0$. Тогда интегральная кривая, которая определяет решение этого уравнения, имеет вид…

1) A
2) B
3) C
4) D

№ 8 *один вариант ответа*

Какое из следующих дифференциальных уравнений решается подстановкой $y = U\,V$ ...

1) $y' = \dfrac{2x+5}{y^2}$
2) $y' - \dfrac{2y}{x} = \sin 2x$
3) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y}{x}$
4) $y'' = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

№ 9 *один вариант ответа*

Порядок дифференциального уравнения

$y'' = -3\dfrac{(y')^2}{y^2+4}$ можно понизить заменой...

1) $y' = z(x)$
2) $y'' = z(y)$
3) $y' = z(y)$
4) $y'' = z(x)$

№ 10 *один вариант ответа*

Общее решение дифференциального уравнения $y''' = \sin 2x$ имеет вид…

1) $y = \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$
2) $y = \frac{1}{8}\cos 2x + C$
3) $y = -\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$
4) $y = \cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$

№ 11 *один вариант ответа*

Общим решением линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и характеристическими корнями $k_1 = k_2 = 2,\ k_3 = -1$ является...

1) $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - C_3 \sin x + C_4 \cos x$

2) $y = (C_1 + C_2 x)\sin 2x + (C_3 + C_4 x)\cos 2x - C_5 \sin x + C_6 \cos x$

3) $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + C_3 e^{-x}$

4) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

№ 12 *один вариант ответа*

Дано линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $3y'' - 6y' + 8y = 0$. Тогда его характеристическое уравнение имеет вид...

1) $k^2 - 3k + 8 = 0$

2) $3k^2 - 6k + 8 = 0$

3) $3k^2 + 8k - 6 = 0$

4) $3k^2 + 6k - 8 = 0$

№ 13 *один вариант ответа*

Корни характеристического однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами равны: $k_1 = -3,\ k_2 = 2$. Тогда это уравнение имеет вид...

1) $y'' - y' - 6y = 0$

2) $y'' + y' - 6y = x + 4$

3) $y'' + 3y' - 2y = 0$

4) $y'' + y' - 6y = 0$

№ 14 *один вариант ответа*

Дано дифференциальное уравнение $y'' - 25y = 3e^{5x}$. Общим видом частного решения данного уравнения является...

1) $y(x)_{частное} = C_0 x^2 e^{5x}$

2) $y(x)_{частное} = C_0 e^{5x}$

3) $y(x)_{частное} = C_0 x e^{5x}$

4) $y(x)_{частное} = e^{5x}(C_0 + C_1 x)$

Индивидуальные домашние задания

Вариант 1

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $xy' - y = 0,\ y(-2) = 4$.

2. $y' = \sqrt{\dfrac{y^2 - 4}{4 - x^2}}$.

Однородные уравнения

3. $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$.

4. $xy' \sin\dfrac{y}{x} + x = y \sin\dfrac{y}{x},\ y(1) = 0$.

Линейные уравнения

5. $y' - \dfrac{y}{x} = x \cos x$.
6. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x},\ y(1) = 4$.

Уравнение Бернулли

7. $y'x + y = -xy^2$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = \dfrac{4^x + 1}{2^x},\ y(0) = 3,\ y'(0) = -2$.
9. $y'' + y' tgx = \cos^2 x$.
10. $3y'' - \dfrac{y'}{\sqrt[3]{y^2}} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $3y'' - 7y' + 4y = 0$.
12. $9y'' - 12y' + 4y = 0$.
13. $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' + 9y = 9{,}8 \cos 7x$.
15. $y'' + 5y' = 10e^{-5x}$.
16. $y'' - 2y' + y = e^x (2x + 3),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Вариант 2

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $xy'+y=0,\ y(-2)=4$.
2. $y'\left(x^2-4\right)=2xy$.

Однородные уравнения

3. $y'=\dfrac{y}{x}-3\dfrac{x}{y}$.
4. $y'=\dfrac{y}{x}+tg\dfrac{y}{x}$.

Линейные уравнения

5. $y'-\dfrac{3y}{x}=x,\ y(1)=3$.
6. $y'-4y\ ctgx=\sin^2 x$.

Уравнение Бернулли

7. $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y''=\dfrac{1}{\cos^2 2x},\ y(0)=-1,\ y'(0)=3$.
9. $y''+y'tgx=0$.
10. $y''-\dfrac{(y')^2}{2y+1}=0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $3y''-7y'+6y=0$.
12. $y''-8y'+16y=0$.
13. $y''-6y'+13y=0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y''+4y'=(8x+10)e^{-4x}$.
15. $2y''-9y'+4y=-4x^2+22x-9,\ y(0)=3,\ y'(0)=-5$.
16. $y''+9y=7\cos 2x+\sin 2x$.

Вариант 3

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $yy' + x = 0,\ y(-2) = 4$.
2. $x\sqrt{1+x^2}\left(y^2+1\right) - yy' = 0$.

Однородные уравнения

3. $y' = \dfrac{y}{x} + 5\cos^2\dfrac{y}{x}$.
4. $y' = \dfrac{y}{x} - 3tg\dfrac{y}{x}$.

Линейные уравнения

5. $y' + \dfrac{y}{x} = e^{x^2},\ y(1) = 1$.
6. $y' + 4y\ \mathrm{ctg}\ x = \cos x$.

Уравнение Бернулли

7. $y' + xy = xy^3$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = \dfrac{1}{(x+1)^4},\ y(0) = -0{,}5,\ y'(0) = -1$.
9. $y'' + \dfrac{2y'}{x} = \dfrac{3}{x^2}$.
10. $2y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}}$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y'' - 14y' - 15y = 0$.
12. $9y'' + 12y' + 4y = 0$.
13. $y'' - 8y' + 25y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' + 4y = 3\sin 8x$.
15. $y'' - 3y' = (12x+1)e^{3x}$.
16. $y'' + 8y' + 16y = 2e^{-4x},\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0{,}5$.

Вариант 4

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $y'\cdot(2x+3)=y,\ \ y(0)=\sqrt{3}$.
2. $\sqrt{1+y^2}\left(x^2+1\right)-xyy'=0$.

Однородные уравнения

3. $y'=\dfrac{y}{x}-\sin^2\dfrac{y}{x}$.
4. $xyy'=y^2+2x^2$.

Линейные уравнения

5. $y'-\dfrac{y}{1+x}=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.
6. $y'-y\,ctgx=\dfrac{1}{\sin x},\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Уравнение Бернулли

7. $y'-\dfrac{4y}{x}=xy^2$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y''=\dfrac{x-2}{\sqrt{x}},\ \ y(1)=-\dfrac{5}{3},\ \ y'(1)=-3$.
9. $y''-y'\operatorname{ctg}x=\sin^2 x$.
10. $y''-\dfrac{2(y')^2}{y-1}=0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y''+y'-2y=0$.
12. $y''+8y'+16y=0$.
13. $y''-6y'+25y=0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y''-2y'=3\sin 4x$.
15. $y''-4y'-21y=2e^{-3x},\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=3$.
16. $y''+5y'=6x+2$.

Вариант 5

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $x^2 y' + y = 0,\ \ y(1) = 1$.
2. $xy - \sqrt{1 - x^2} \cdot y' = 0$.

Однородные уравнения

3. $y' = \dfrac{y}{x} + 6\dfrac{x}{y}$.
4. $y' = \dfrac{y}{x} + 2ctg\dfrac{y}{x}$.

Линейные уравнения

5. $y' + \dfrac{2x}{1 + x^2} y = x,\ \ y(0) = 4$.
6. $y' + 4\mathrm{ctg}\, x\, y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$.

Уравнение Бернулли

7. $y' + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{1}{2x^2 y}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = \sin^2 x,\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = 2$.
9. $y''(x^3 + 1) = 3x^2(y' + 1)$.
10. $2y'' + \dfrac{(y')^2}{y + 1} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y'' - 5y' + 6y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -1$.
12. $36y'' - 12y' + y = 0$.
13. $y'' - 8y' + 20y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' + y' - 6y = 3\sin 4x - \cos 4x$.
15. $y'' + 9y = -8x^2 + x - 3$.
16. $y'' - 4y = -2xe^x$.

Вариант 6

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $2y'\sqrt{x} = y,\ \ y(4) = 1$.
2. $x\sqrt{1+x^2} - \sqrt{y}\,y' = 0$.

Однородные уравнения

3. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.
4. $y' = \dfrac{y}{x} + 4\cos^2\dfrac{y}{x}$.

Линейные уравнения

5. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = 2$.
6. $y' + 3y\,\mathrm{ctg}\,x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Уравнение Бернулли

7. $y' - \dfrac{y}{x} = -2y^2$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = \dfrac{x-1}{x^3},\ \ y(1) = 2,\ \ y'(1) = -1$.
9. $xy'' + y' = 1 - x$.
10. $y'' - \dfrac{(y')^2}{y-2} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y'' - 4y' - 5y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2$.
12. $9y'' - 6y' + y = 0$.
13. $y'' + 6y' + 13y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' + 6y' = 6x + 10$.
15. $y'' + 25y = e^{2x}$.
16. $y'' - 2y' + y = 2\sin 3x$.

Вариант 7

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $x^2 y' + y^2 = 0,\ \ y(-1) = 1$.
2. $y' + y\ \mathrm{tg}\, x = 0$.

Однородные уравнения

3. $y' = \dfrac{y}{x} + 3\dfrac{x}{y}$.
4. $y' = \mathrm{ctg}\, \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}$.

Линейные уравнения

5. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{1+x^2}$.
6. $y' + 3y\ \mathrm{ctg}\ x = \dfrac{1}{\sin^2 x},\ \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Уравнение Бернулли

7. $y' + \dfrac{y}{x} = y^2 \ln x$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = e^x + 1,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 2$.
9. $y''(x+1) - 3y' = \sqrt{x+1}$.
10. $y'' - \dfrac{(y')^2}{y+1} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y'' - 5y' - 6y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -2$.
12. $36y'' + 12y' + y = 0$.
13. $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' + 3y' = (2x-5)e^{-3x}$.
15. $y'' + 4y = x^2 - 4x + 3$.
16. $y'' - 9y = 5\cos 3x + 2\sin 3x$.

Вариант 8

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $y'x^3 = 2y,\ \ y(2) = 1$.
2. $y'\left(1 + x^2\right)\ln y = y$.

Однородные уравнения

3. $y' = \dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{y}{x}\right)^3$.
4. $y' = \dfrac{y}{x} + 4\cos^2\dfrac{y}{x}$.

Линейные уравнения

5. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{1 + x^2}$.
6. $y' + 3y\ \mathrm{ctg}\ x = \dfrac{1}{\sin^3 x}$.

Уравнение Бернулли

7. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{x}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = \sin^2 x,\ \ y(0) = \dfrac{1}{2},\ \ y'(0) = 2$.
9. $y'' + \dfrac{y'}{x + 2} = x + 2$.
10. $y''e^{2y} - y' = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y'' + 2y' - 3y = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0$.
12. $9y'' + 6y' + y = 0$.
13. $y'' - 10y' + 29y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' - 5y' = 5\sin 5x$.
15. $y'' + 9y' + 20y = 2e^{-4x}$.
16. $y'' + 2y = x^2 - 5x + 2$.

Вариант 9

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $xyy' = 1 - x^2, \; y(1) = 1$.
2. $y'(1 - x) = y + 1$.

Однородные уравнения

3. $y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$.
4. $y' = \frac{2y}{x} + 5$.

Линейные уравнения

5. $y' - \frac{y}{x - 4} = (x - 4)^2$.
6. $y' + 2y \operatorname{ctg} x = \cos^3 x$.

Уравнение Бернулли

7. $y' + y = \frac{\cos x}{y}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = x + \sqrt{x}, \; y(1) = 0, \; y'(1) = \frac{2}{3}$.
9. $y'' - \frac{y'}{2x} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.
10. $y'' - \frac{4(y')^2}{y + 1} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $2y'' - y' - y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 2$.
12. $y'' - 12y' + 36y = 0$.
13. $y'' - 10y' + 34y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' + 4y = 6\sin x$.
15. $y'' - 5y' = (x + 2)e^{5x}$.
16. $y'' - 2y' + y = e^x$.

Вариант 10

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $y' \operatorname{tg} x = y$.
2. $y'\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{y} = 0,\ \ y(0) = 4$.

Однородные уравнения

3. $y' = \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^3$.
4. $y' = \dfrac{y}{x} - 5\cos^2 \dfrac{y}{x}$.

Линейные уравнения

5. $y' + 2y \operatorname{ctg} x = \cos x$.
6. $y' + \dfrac{2xy}{1+x^2} = x$.

Уравнение Бернулли

7. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 3x},\ \ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0,\ \ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1$.
9. $\left(x^2 - 1\right) y'' + 2y' = 0$.
10. $2y'' + \dfrac{3\left(y'\right)^2}{y-1} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y'' - 7y' + 12y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -2$.
12. $y'' - 6y' + 9y = 0$.
13. $y'' + 4y' + 20y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' + 16y = 3\sin x$.
15. $y'' - 3y' = 6x - 10$.
16. $y'' - 4y = (x-4)e^{2x}$.

Вариант 11

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $\dfrac{y'}{y} - \sqrt{x} = 0$.

2. $1 + y^2 = -xy,\ \ y(1) = 1$.

Однородные уравнения

3. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{\cos\dfrac{y}{x}}$.

4. $x^3 y' = y\left(y^2 + x^2\right)$.

Линейные уравнения

5. $y' + \dfrac{y}{x} = x + \dfrac{1}{x},\ \ y(-1) = \dfrac{1}{3}$.

6. $y' + 2y\,\mathrm{ctg}\,x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Уравнение Бернулли

7. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{2x}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = \dfrac{1}{(x+2)^3},\ \ y(-1) = 1,\ \ y'(-1) = 3$.

9. $y'' + \dfrac{y'}{2x} = x^2$.

10. $2y'' - \dfrac{(y')^2}{y+2} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y'' + 6y' - 7y = 0$.

12. $y'' + 12y' + 36y = 0$.

13. $y'' + 6y' + 58y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' + 2y' = -3e^{-2x}$.

15. $2y'' - 2y' + y = x^2 - 3x - 13$.

16. $y'' + 25y = 5\cos 2x - 3\sin 2x$.

Вариант 12

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $xyy' - \sqrt{1-y^2} = 0,\ \ y(1) = 0$.
2. $y + 5 = \sqrt{5-x^2}\, y'$.

Однородные уравнения

3. $y' = \dfrac{y}{x} + 3e^{-\frac{y}{x}},\ \ y(1) = 0$.
4. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

Линейные уравнения

5. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x}$.
6. $y' - 3y\,\mathrm{ctg}\,x = \sin^3 x$.

Уравнение Бернулли

7. $y' - \dfrac{y}{2x} = \dfrac{\ln x}{2y}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = \cos^2 x,\ \ y(0) = -\dfrac{1}{4},\ \ y'(0) = 1$.
9. $(x^2+1)y'' + 2xy' = 0$.
10. $y'' + \dfrac{4(y')^2}{y+3} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $3y'' + 2y' - y = 0$.
12. $y'' + 6y' + 9y = 0$.
13. $y'' - 4y' + 29y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' + 2y' = 3x^2 + 18x + 4$.
15. $y'' + 7y = 4\sin x,\ \ y(0) = \dfrac{1}{2},\ \ y'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
16. $y'' - 2y = e^{-2x}$.

Вариант 13

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $(x^2+4)y' = x(y^2-4)$.
2. $y\left(x^2+1\right)y' = x,\ \ y(0)=2$.

Однородные уравнения

3. $y' = \dfrac{y}{x} - 4\dfrac{x}{y}$.
4. $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{2}{\cos\frac{y}{x}},\ \ y(1)=0$.

Линейные уравнения

5. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = 2\sin x$.
6. $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2$.

Уравнение Бернулли

7. $y' + \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = \sqrt{x}+1,\ \ y(1)=1{,}5,\ \ y'(1)=3$.
9. $y'' - \dfrac{3}{x}y' = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.
10. $3y'' + \dfrac{(y')^2}{y+1} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y'' - 3y' - 4y = 0,\ \ y(0)=4,\ \ y'(0)=1$.
12. $25y'' - 10y' + y = 0$.
13. $y'' + 6y' + 25y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' + 3y = 2\sin 4x$.
15. $y'' - 4y' = (8x+2)e^{4x}$.
16. $2y'' - 9y' + 4y = -2x^2 + 5x - 1$.

Вариант 14

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $(1+3\cos x)\,y' = y\sin x$.
2. $y(1+x^2) - xy' = 0,\ \ y(1) = 1$.

Однородные уравнения

3. $y' = 2\dfrac{y}{x} - 3$.
4. $y' = \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^3$.

Линейные уравнения

5. $y' + \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{1}{(x-1)^2},\ \ y(0) = 1$.
6. $y' - 2y\,\mathrm{ctg}\,x = \sin^2 x$.

Уравнение Бернулли

7. $y' - \dfrac{y}{2x} = \dfrac{1}{2xy}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = e^{2x} + 1,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1$.
9. $(x^4 - 2)y'' = 4x^3 y'$.
10. $y'' - \dfrac{2(y')^2}{2y+1} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y'' - y' - 6y = 0$.
12. $4y'' - 4y' + y = 0,\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = 0$.
13. $y'' + 8y' + 41y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $3y'' - 7y' + 2y = x^2 + 5x - 6$.
15. $y'' + 2y' = (12x+2)e^{-2x}$.
16. $y'' + 5y = 3\sin 2x + \cos 2x$.

Вариант 15

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $(1-10x)y'-y=0$.
2. $xy'=y^2-1,\ \ y(1)=2$.

Однородные уравнения

3. $y'=\dfrac{y}{x}-5\dfrac{x}{y}$.
4. $y'=\dfrac{y}{x}-2\sin^2\dfrac{y}{x}$.

Линейные уравнения

5. $y'-\dfrac{y}{x}=xe^x$.
6. $y'-2y\ \mathrm{ctg}\,x=1$.

Уравнение Бернулли

7. $y'+\dfrac{y}{3x}=\dfrac{1}{2xy}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y''=\sin 3x,\ \ y(0)=-\dfrac{1}{8},\ \ y'(0)=\dfrac{1}{2}$.
9. $(x^2+2)y''=4xy'$.
10. $y''+\dfrac{3\left(y'\right)^2}{1-2y}=0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y''-11y'+30y=0,\ \ y(0)=3,\ \ y'(0)=5$.
12. $25y''+10y'+y=0$.
13. $y''+y'=(8-5x)e^{-x}$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y''+9y=6x^2-2$.
15. $y''-2y'+10y=0$.
16. $y''-6y=3\sin 4x$.

Вариант 16

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $x\sqrt{y}-\sqrt{1-x^2}\,y'=0$.
2. $y\,y'=\dfrac{1-2x}{y},\ \ y(0)=1$.

Однородные уравнения

3. $y'=\dfrac{y}{x}-3\cos^2\dfrac{x}{y}$.
4. $y'=2\dfrac{y}{x}-1,\ \ y(3)=12$.

Линейные уравнения

5. $y'-\dfrac{2x}{1+x^2}y=3$.
6. $y'+y\,\mathrm{ctg}\,x=x$.

Уравнение Бернулли

7. $y'+\dfrac{y}{2x}=-\dfrac{y^3}{2x}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y''=\sqrt{3x-5},\ \ y(2)=1,\ \ y'(2)=2$.
9. $y''+4\dfrac{y'}{x}=x^2+1$.
10. $2y''-\dfrac{3\left(y'\right)^2}{y+1}=0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y''-8y'+7y=0,\ \ y(0)=3,\ \ y'(0)=6$.
12. $4y''+4y'+y=0$.
13. $y''-4y'+40y=0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y''+6y=(3-10x)e^{3x}$.
15. $y''-5y'=4e^{5x}$.
16. $y''-9y=4\cos 6x+2\sin 6x$.

Вариант 17

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $xyy' = x^2 + 1$.
2. $e^x y^2 y' = 1 + e^{2x}$, $y(0) = 0$.

Однородные уравнения

3. $y' = \dfrac{y}{x} - 6\dfrac{x}{y}$.
4. $y' = \dfrac{y}{x} - \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$, $y(1) = -\dfrac{\pi}{3}$.

Линейные уравнения

5. $y' + y \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.
6. $y' - \dfrac{xy}{1 + x^2} = 2x$.

Уравнение Бернулли

7. $y' - \dfrac{y}{3x} = \dfrac{x}{3y^2}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = x^2 + 1$; $y(1) = -0{,}3$; $y'(1) = 1{,}2$.
9. $y'' - 2y' \operatorname{ctg} 2x = \sin 4x$.
10. $2y'' + \dfrac{(y')^2}{2y + 2} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y'' - 9y' + 18y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.
12. $y'' + 10y' + 25y = 0$.
13. $y'' - 6y' + 34y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' + 25y = 7\cos 3x - \sin 3x$.
15. $y'' - 2y' = (5x + 4)e^{2x}$.
16. $y'' - 6y' + 10y = -10x^2 + 2x + 1$.

Вариант 18

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $x^3y' - y(x-2) = 0$.   2. $y'\cos^2 x + y = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Однородные уравнения

3. $y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^3$.   4. $y' = \frac{y}{x} + 4\sin^2\frac{y}{x}$.

Линейные уравнения

5. $y' - \frac{x}{1+x^2}y = \sqrt{1+x^2}$.
6. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Уравнение Бернулли

7. $y' - \frac{y}{2x} = \frac{xe^x}{2y}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = e^{3x} + 1,\ y(1) = \frac{e}{9},\ y'(1) = \frac{e}{3}$.
9. $y'' - \frac{y'}{3(x+1)} = x + 1$.
10. $y'' - \frac{(y')^2}{3y-2} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $4y'' - y' - 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.
12. $y'' - 4y' + 4y = 0$.
13. $y'' - 4y' + 20y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' + 16y = (3x+13)e^{3x}$.
15. $y'' - 4y = -e^{2x}$.
16. $y'' - 2y' = 3x^2 - 6x - 2$.

Вариант 19

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = 0$.

2. $\sqrt{y^2+1} - \sqrt{x^2+1}\,yy' = 0$.

Однородные уравнения

3. $y' = \dfrac{y}{x} + 4\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.

4. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$, $y(1) = 1$.

Линейные уравнения

5. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{1+x^2}$.
6. $y' + y\operatorname{ctg} x = \cos x$.

Уравнение Бернулли

7. $y' + \dfrac{y}{3x} = \dfrac{1}{3x^2y^2}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = \dfrac{3}{x^2}$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 2$.
9. $y'' = 6x\sqrt[3]{(y')^2}$.
10. $y'' + \dfrac{2(y')^2}{y+3} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $3y'' - 2y' - 16y = 0$.
12. $9y'' - 6y' + y = 0$.
13. $y'' + 4y' + 29y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' - 5y' = -(10x+7)e^{5x}$.
15. $y'' + 3y = 6\cos 2x - 3\sin 2x$.
16. $y'' + 2y' = 6x^2 + 8x + 7$.

Вариант 20

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $xy' = y^2 - 5$.

2. $(y-2)y' - y^3 \ln x = 0$.

Однородные уравнения

3. $y' = 2\dfrac{y}{x} - 4$.

4. $y' = \dfrac{y}{x} + 3\sin^2\dfrac{y}{x}$.

Линейные уравнения

5. $y' - \dfrac{y}{x} = x + \dfrac{1}{x}$, $y(1) = 3$.

6. $y' + y\ \mathrm{ctg}\, x = \dfrac{1}{\sin x}$.

Уравнение Бернулли

7. $y' - \dfrac{y}{2x} = -\dfrac{y^3}{2x}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = \sqrt[3]{2-x}$; $y(1) = 0{,}5$; $y'(1) = -1$.

9. $y'' + 2y'\ \mathrm{tg}\, x = \sin x$.

10. $5y'' + \dfrac{2(y')^2}{1-y} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y'' + y' - 12y = 0$.

12. $y'' - y' + \dfrac{y}{4} = 0$.

13. $y'' + 8y' + 20y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' - 6y' + 13y = \cos 3x - 2\sin 3x$.

15. $y'' + 6y' = 2e^{-6x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \dfrac{2}{3}$.

16. $y'' + y' - 6y = -3x^2 - 3x + 2$.

Вариант 21

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 0,\ y(1) = 2$.

2. $(y-2)e^{2x}y' = y^2$.

Однородные уравнения

3. $y' = 2\dfrac{y}{x} + 3$.

3. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{y}\right)^3$.

Линейные уравнения

5. $y' - \dfrac{xy}{x^2+5} = \sqrt{x^2+5}$.

6. $y' + y\,\mathrm{ctg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$.

Уравнение Бернулли

7. $y' - \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{2y}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = \dfrac{1}{2}\sin 2x,\ y(0) = \dfrac{1}{2},\ y'(0) = \dfrac{1}{2}$.

9. $y'' - \dfrac{4x}{x^2+1}y' = -x$.

10. $4y'' - \dfrac{(y')^2}{1+y} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $y'' - y' - 12y = 0$.

12. $16y'' - 8y' + y = 0$.

13. $y'' - 10y' + 41y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $2y'' - 2y' + y = 5\sin 2x - \cos 2x$.

15. $y'' + 6y' = (12x-5)e^{-6x}$

16. $y'' + 4y = x^2 + 3x - 4$.

Вариант 22

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $\sqrt[3]{x}\,y' = y^2 + 1$.
2. $(1+e^{2y})x = e^y y'$.

Однородные уравнения

3. $y' = \dfrac{y}{x} + 5\dfrac{x}{y}$.
4. $y' = \dfrac{y}{x} + 2\sin^2\dfrac{y}{x}$.

Линейные уравнения

5. $y' - \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
6. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x$.

Уравнение Бернулли

7. $y' - \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x^3}{2y}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = \dfrac{1}{(4x-3)^2}$, $y(1) = -1$, $y'(1) = \dfrac{1}{4}$.
9. $y'' - 3y'\operatorname{ctg}3x = \sin^2 3x$.
10. $2y'' + \dfrac{5(y')^2}{1-y} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $3y'' - y' - 4y = 0$.
12. $y'' - 2y' + y = 0$.
13. $y'' - 8y' + 52y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' + 16y = -4x^2 + 8x + 6$.
15. $y'' - 4y' = (8x+10)e^{4x}$.
16. $9y'' - 6y' + 10y = x^2 + 7x - 5$.

Вариант 23

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{y}, \ y(1) = 1$.
2. $y'\left(x^2 + 1\right) - \sqrt[5]{y}\, x = 0$.

Однородные уравнения

3. $y' = \dfrac{y}{x} + 4\dfrac{x}{y}$.
4. $xyy' = y^2 + 2x^2$.

Линейные уравнения

5. $y' - \dfrac{y}{x} = xe^x, \ y(1) = 0$.
6. $y' - y\,\mathrm{ctg}\, x = \cos x$.

Уравнение Бернулли

7. $y' - \dfrac{y}{3x} = \dfrac{\ln x}{3y^2}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = x^2 + 1; \ y(1) = 1; \ y'(1) = 0{,}5$.
9. $3y''\sqrt[3]{x^2} = y'$.
10. $3y'' + \dfrac{(y')^2}{2y + 2} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $7y'' - 11y' + 4y = 0$.
12. $16y'' + 8y' + y = 0$.
13. $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' + 4y = 2\sin 4x$.
15. $y'' + 3y' = (-7x + 6)e^{-3x}$.
16. $2y'' - 9y' - 5y = 5x^2 + 3x - 2, \ y(0) = 4, \ y'(0) = -12$.

Вариант 24

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $(x+1)\,y' - y = 0,\ \ y(1) = 1$.
2. $\operatorname{ctg} x y' = \sqrt[3]{y}$.

Однородные уравнения

3. $y' = \dfrac{y}{x} + 3\dfrac{x}{y}$.
4. $xy' = 2y\ln\dfrac{y}{x}$.

Линейные уравнения

5. $y' + \dfrac{x}{x^2+1}\,y = 2x$.
6. $y' - y\operatorname{ctg} x = \sin x$.

Уравнение Бернулли

7. $y' - \dfrac{y}{3x} = \dfrac{xe^x}{3y^2}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

8. $y'' = \sin 2x;\ \ y(0) = -0,6;\ \ y'(0) = 1$.
9. $y'' + \dfrac{3y'}{x} = \dfrac{1}{x} + 1$.
10. $y'' + \dfrac{3\left(y'\right)^2}{y-2} = 0,\ \ y(1) = 3,\ \ y'(1) = 1$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

11. $10y'' + y' - 2y = 0$.
12. $y'' + 14y' + 49y = 0$.
13. $y'' + 8y' + 25y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

14. $y'' - 6y' = (2x-3)e^{6x}$.
15. $4y'' - 8y' + 5y = -6x^2 + 2x - 4$.
16. $y'' + 9y = 3\cos 2x$.

Вариант 25

Уравнения с разделяющимися переменными

1. $y'e^{2x} = \frac{1}{y}$.   2. $y^2 + 4 = \sqrt[3]{x}\, y'$.

Однородные уравнения

2. $y' = \frac{xy^2 + yx^2}{x^3}$.
3. $y' = \frac{y}{x} + ctg\frac{y}{x}$.

Линейные уравнения

4. $y' + \frac{y}{x-3} = \frac{1}{(x-3)^2}$, $y(0) = 1$.
5. $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin 2x$.

Уравнение Бернулли

6. $y' - \frac{y}{3x} = \frac{x}{3y^2}$.

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

7. $y'' = \frac{1}{(x-2)^2}, y(3) = -1, y'(3) = 2$.
8. $y'' - \frac{y'}{4x} = \sqrt{x}$.
9. $y'' - \frac{4\left(y'\right)^2}{y-2} = 0$.

Однородные линейные дифференциальные уравнения

10. $y'' - y' - 30y = 0$.
11. $y'' + 2y' + y = 0$.
12. $y'' + 4y' + 53y = 0$.

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

13. $y'' - 2y' = -2\cos 2x$.
14. $y'' - 6y' = (6x+1)e^{6x}$.
15. $2y'' + y' - y = -x^2 + 5x - 2$.

Ответы на тест

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
2, 3	*1, 4*	*4*	*4*	*2*	*1*	*3*
№ 8	**№ 9**	**№ 10**	**№ 11**	**№ 12**	**№ 13**	**№ 14**
2	*3*	*1*	*3*	*2*	*4*	*1*

Содержание